Neskončna vrsta $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$

Boštjan Kuzman

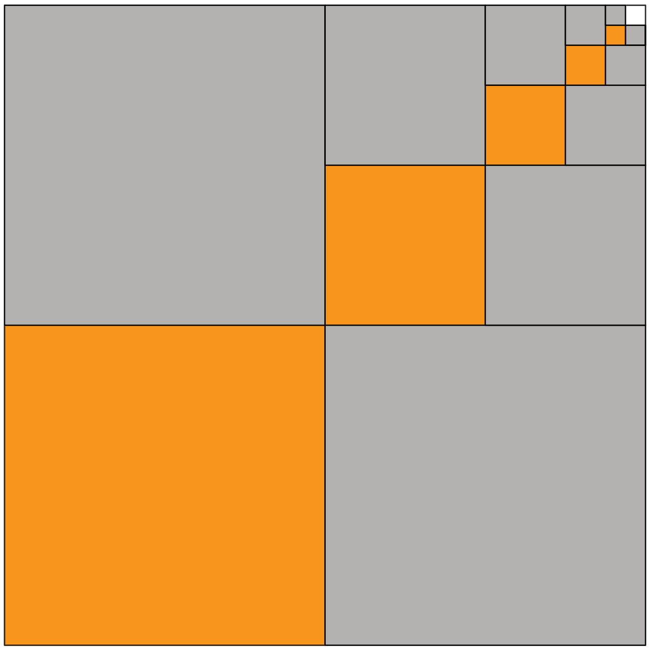
Neskončne vsote ali vrste so poznali že antični matematiki, posebej spreten z njimi je bil Arhimed. V svojem delu o kvadraturi parabole je pri računanju ploščine pod krivuljo seštel prav vrsto iz naslova in ugotovil, da je njena vsota enaka natanko $1/3$. Ilustracija oziroma geometrijska ponazoritev te na prvi pogled nekoliko presenetljive trditve predstavlja tokratni izziv za naše bralce.

Današnji maturantje se običajno v četrtem letniku srednje šole učijo, da ima neskončna geometrijska vrsta $a_0 + a_0q + a_0q^2 + \ldots$ končno vsoto $S = \frac{a_0}{1-q}$, če za razmerje med dvema zaporednima členoma velja $|q| < 1$. Arhimedova vrsta $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ ima začetni člen $a_0 = \frac{1}{4}$ in kvocient $q = \frac{1}{4}$, zato lahko vsoto vrste izračunamo po formuli

$$S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Arhimed si je pri seštevanju te vrste pomagal z geometrijsko razlago, ki prikazuje ploščino zaporedja vgnezdenih kvadratov. Ustrezno ilustracijo zlahka najdemo z brskanjem po spletu, mi pa jo bomo narisali sami in jo tudi animirali z drsnikom.

- Vstavimo drsnik n z razponom od 0 do 10 v korakih po 1.
- Z ukazom `Mnogokotnik((0,0),(1,0),4)` narišemo največji kvadrat.



SLIKA 1.
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}$, saj je oranžno pobarvana natanko $1/3$ ploščine celotnega lika - za vsak oranžen kvadrat sta na sliki še dva siva kvadrata enake velikosti.

- Zaporedje oranžnih kvadratov na diagonali začetnega narišemo z ukazom

```
z1=Zaporedje(Mnogokotnik(
    (1-1/2^(k-1),1-1/2^(k-1)),
    (1-1/2^k,1-1/2^(k-1)),4),k,1,n)
```

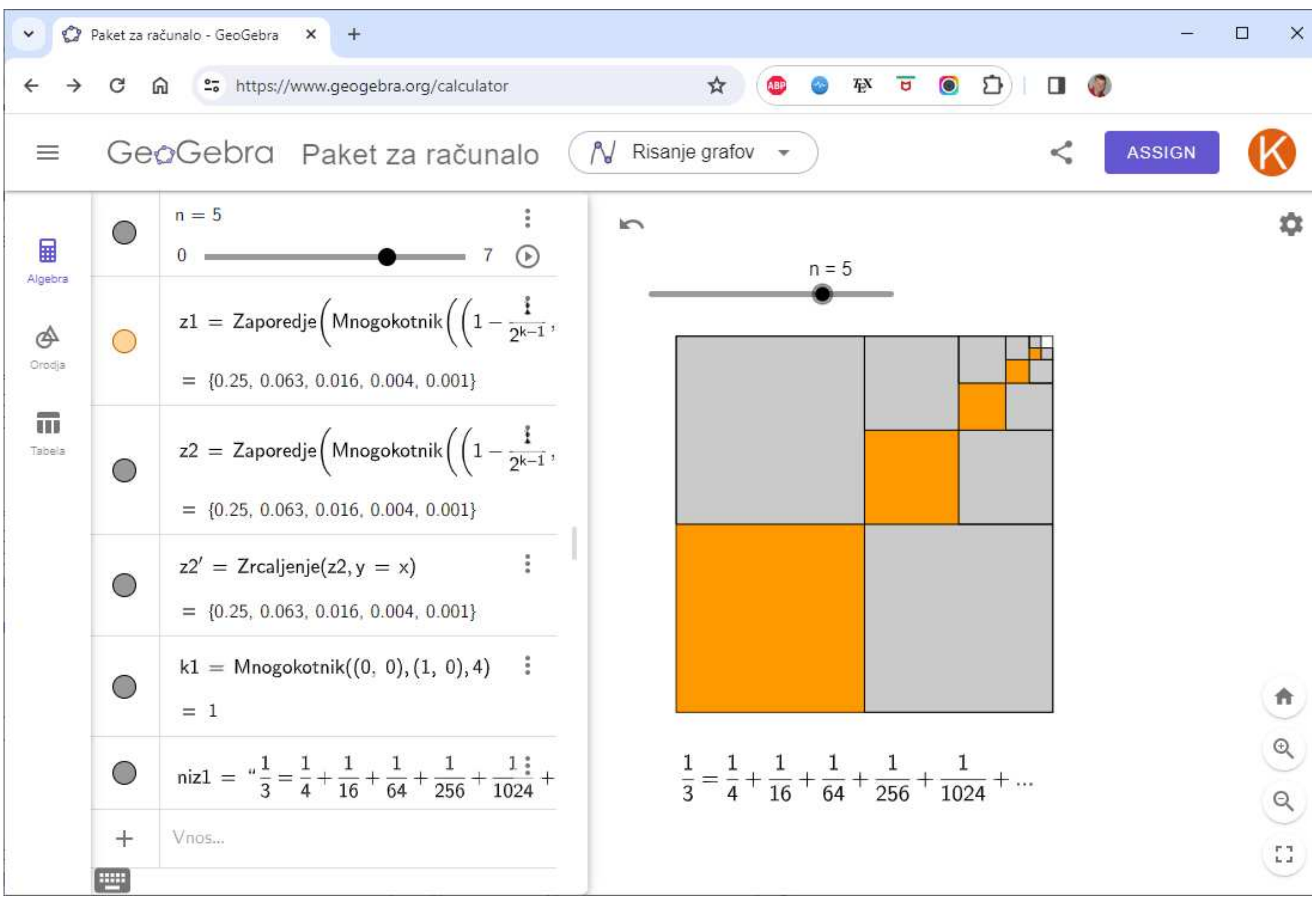
- Zaporedje kvadratov nad diagonalo dodamo z ukazom

```
z2=Zaporedje(Mnogokotnik(
    (1-1/2^(k-1),1-1/2^k),
    (1-1/2^k,1-1/2^k),4),k,1,n)
```

- Zadnje zaporedje prezrcalimo čez premico $y = x$ z ukazom `Zrcaljenje(z2,y=x)`.
- Zaporedja kvadratov ustrezno pobarvamo.
- Če želimo, lahko k ilustraciji dodamo še zapis vrste z ukazom

```
Tekst(ZapisUlomka(1/3)+"="
   +(Vsota(Zaporedje(
     ZapisUlomka(1/4^k)+"+",k,1,n)))
   +("..." ""),(0,-0.1),true,true)
```

Tako, naš izdelek je pripravljen za preizkus. O Arhimedovi kvadraturi parabole bomo več povedali v kateri od prihodnjih številk. Medtem pa lahko bralci in bralke poskusijo še sami poiskati in ilustrirati kakšno zanimivo geometrijsko vrsto.



SLIKA 2.
Končni izdelek v GeoGebri

× × ×