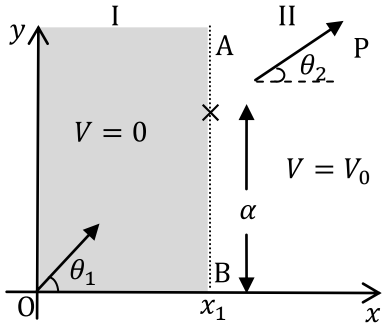
Ekstremalno načelo **(Skupne točke: 10)**

A Ekstremalno načelo v mehaniki



Slika 1

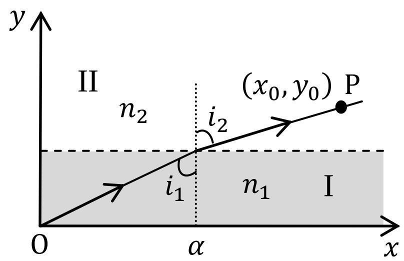
Zamislimo si vodoravno ravnino xy, na kateri ni trenja, kot kaže slika 1. Premica AB z enačbo $x = x_1$ deli ravnino na področje I in področje II. Točkast delec z maso m ima v področju I potencialno energijo $V = 0$ in v področju II konstantno potencialno energijo $V = V_0$. Delec pošljemo iz koordinatnega izhodišča O s hitrostjo v_1 vzdolž premice, ki oklepa kot θ_1 z osjo x. V področju II se do točke P delec giblje s stalno hitrostjo v_2 po premici, ki oklepa kot θ_2 z osjo x. V celotni nalogi T2 (v vseh delih) zanemari težnost in relativistične pojave.

A1	Izrazi hitrost v_2 s parametri m, v_1 in V_0.	**0.2**
A2	Izrazi hitrost v_2 s parametri v_1, θ_1 in θ_2.	**0.3**

Količino »akcija« z oznako A definiramo kot $A = m\int v(s)ds$, kjer je ds infinitezimalno majhna dolžina poti vzdolž tira delca z maso m, ki se giblje s hitrostjo $v(s)$. Integral izračunamo vzdolž celotnega tira delca. Kot primer poglejmo delec, ki enakomerno kroži z velikostjo hitrosti v po krožnici s polmerom R: akcija A za en obhod delca je $2\pi mRv$. Za delec s konstantno energijo E se da pokazati, da se bo gibal po tistem izmed vseh mogočih tirov med dvema danima točkama, vzdolž katerega ima akcija A (definirana zgoraj) ekstrem (minimum ali maksimum). Zgodovinsko je ta zakonitost poznana kot načelo minimalne akcije (NMA).

A3	Iz NMA sledi, da je tir delca, ki se giblje med dvema danima točkama v področju s konstantno potencialno energijo, daljica. Naj bosta koordinati danih točk O in P (slika 1) po vrsti (0,0) in (x_0, y_0). Točka, kjer delec iz področja I vstopa v področje II, ima koordinate (x_1, α). V nadaljevanju upoštevaj, da je vrednost x_1 konstantna in da se vrednost A spreminja samo z α. Z uporabo NMA izrazi razmerje v_1/v_2 z vsemi podanimi koordinatami.	**1.0**

B Ekstremalno načelo v optiki

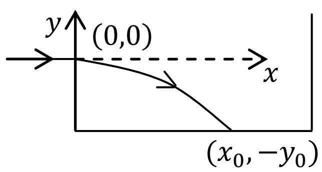


Slika 2

Svetlobni žarek vpada iz sredstva I z lomnim količnikom n_1 v sredstvo II z lomnim količnikom n_2. Sredstvi I in II loči meja, ki je vzporedna z osjo x. Vpadni kot žarka v sredstvu I je i_1, lomni kot žarka v sredstvu II je i_2 (slika 2). Da izračunamo pot žarka, uporabimo drugo ekstremalno načelo, poznano kot Fermatovo načelo.

B1	Načelo pravi, da potuje svetloba med dvema danima točkama po tisti poti izmed vseh mogočih poti, za katero ima čas potovanja ekstrem. Iz Fermatovega načela izpelji povezavo med sin i_1 in sin i_2.	**0.5**

Na sliki 3 je skicirana pot laserskega curka, ki vpada vodoravno v raztopino sladkorja v vodi. Koncentracija sladkorja v raztopini raste z globino. Posledično se tudi lomni količnik raztopine veča z globino.



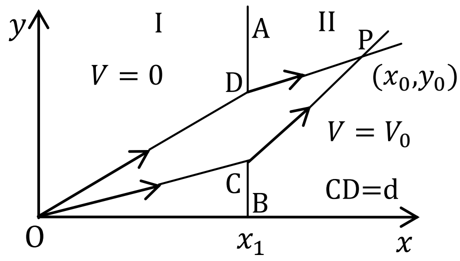
Slika 3: Posoda s sladkorno raztopino.

B2	Predpostavi, da je lomni količnik $n(y)$ odvisen le od y. Uporabi enačbo, ki si jo dobil v delu B1 in izrazi strmino žarka (poti svetlobe) dy/dx s parametri n_0 (vrednost lomnega količnika pri $y = 0$) in $n(y)$.	**1.5**

B3	Laserski curek usmerimo vodoravno na raztopino sladkorja. V točko, kjer laserski curek vstopa v raztopino, postavimo koordinatno izhodišče (0,0), tako da je dno posode pri $y = -y_0$, kot kaže slika 3. Za lomni količnik privzamemo odvisnost $n(y) = n_0 - ky$, kjer sta n_0 in k pozitivni konstanti. Zapiši obliko laserskega curka v sladkorni raztopini, tako da izraziš x kot funkcijo y. Koristiti ti utegneta zvezi $\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right) + C$ in/ali $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$.	**1.2**
B4	Izračunaj vrednost koordinate x_0, kjer žarek zadene dno posode. Za vrednosti parametrov vzemi $y_0 = 10{,}0$ cm, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0{,}05\ \mathrm{cm}^{-1}$.	**0.8**

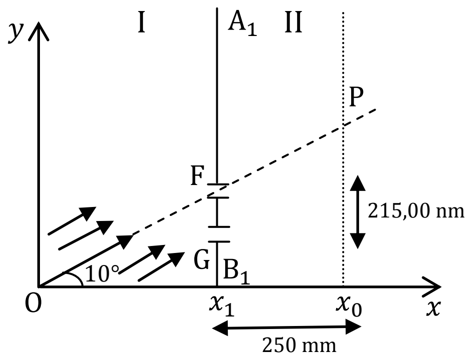
C Ekstremalno načelo in valovna narava delcev

V nadaljevanju bomo raziskali zvezo med NMA in valovno naravo gibajočih se delcev. Predpostavili bomo, da gre delec lahko iz O v P po različnih tirih, pri čemer bomo iskali tisti tir, po katerem de Broglievi valovi delca konstruktivno interferirajo sami s sabo.

C1	Ko se delec premakne vzdolž svojega tira za infinitezimalni premik Δs, se faza njegovih de Broglievih valov poveča za $\Delta\varphi$. Poišči zvezo med $\Delta\varphi$ in spremembo akcije ΔA ter Planckovo konstanto h.	**0.6**
C2	Spomni se problema iz dela A, ko je delec potoval od O do P (glej sliko 4). Na mejo obeh območij AB namestimo zaslonko. V zaslonki je med točkama C in D ozka reža s širino d, velja $d \ll (x_0 - x_1)$ in $d \ll x_1$. Obravnavaj dva skrajna tira OCP in ODP, pri čemer se tir OCP sklada s tirom klasičnega delca, ki si ga obravnaval pri delu A. Do prvega reda natančno izračunaj razliko $\Delta\varphi_{CD}$ med prirastkoma faz vzdolž obeh skrajnih tirov.  **Slika 4**	**1.2**

D Interferenca snovnih valov

V točki O je elektronski top, iz katerega leti usmerjen curek elektronov proti ozki reži F v zaslonki A_1B_1 pri $x = x_1$. Črta, ki povezuje točke OFP, je ravna. Točka P je na zaslonu pri $x = x_0$ (glej sliko 5). V sredstvu I je hitrost elektronov $v_1 = 2{,}0000 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ in $\theta = 10{,}0000^\circ$. Potencial v sredstvu II je tak, da je hitrost $v_2 = 1{,}9900 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Razdalja med x_0 in x_1 je 250,00 mm. Interakcije med različnimi elektroni zanemariš.



Slika 5

D1	Elektroni pred pospeševanjem v elektronskem topu mirujejo. S kolikšno napetostjo U_1 so v topu pospešeni?	**0.3**
D2	V zaslonki A_1B_1 odpremo še eno enako režo G v oddaljenosti 215,00 nm pod režo F (slika 5). Razlika v fazah de Broglievih valov, ki dospejo do P skozi reži F in G, je $2\pi\beta$. Izračunaj β.	**0.8**
D3	Kolikšna je najmanjša razdalja Δy med P in drugo točko na zaslonu, ki je predvidoma ne bo zadel noben elektron? [Opomba: utegne ti koristiti približna zveza $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$ za majhne $\Delta\theta$.]	**1.2**
D4	Curek elektronov ima prečni presek 500 nm × 500 nm. V povprečju je v tem curku na razdalji 2 m vzdolž smeri gibanja vsaj en elektron. Kolikšna je minimalna številska gostota toka elektronov v curku I_{min}, (število delcev, ki v časovni enoti preletijo enoto preseka, pravokotnega na smer njihovega gibanja)?	**0.4**